Fŏrsta Capitlet af allmăn Storhetslăra,

med Vidtberömda Filosofiska Fakultetens minne,

under skydd

af

Mag. CARL JOH. D$^{\underline{s}}$ HILL,

Prof. i Math.

till Lagerkransens vinnande

försvarade i stora Auditorium

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

den 15 Juni 1844

af

KARL OSKAR RUTH,

Filosofie Kandidat af Blekingska Nationen.

V.

Lund,
tryckt uti Berlingska Boktryckeriet,
1844.

annat än *antilogarithmen* till r, under det $r\underset{*}{\odot}\overline{1}$ är *arcus tangentis* eller hyperlogarithmen till summan $x♀y$.

O. Jag behöfver således icke numera taga serier till hjelp för att införa dessa Trigonomiska functioner i Algebran.

J. Det är alldeles öfverflödigt, utan tvärtom kan man lätt härleda dessa serier jemte dessa functioners alla öfriga egenskaper från deras sålunda stadgade Algebraiska betydelse, enligt hvilka de ej äro annat än en *product* $r\odot x$ till den ganska enkla summan $\frac{x+y}{1-xy}$, eller des omvända = rations-exponenten. Föreställe vi nemligen denna venustissima formula $\frac{x+y}{1-xy}$, i hvilken alla de annars så kallade quatuor species förekomma i en enkel förening, med $x♀y$ och des product med $x\underset{*}{\odot}y$ eller $x\underset{+}{\odot}y$ eller $x☿y$, så kunna vi uti detta vårt nya system definiera Tang. x med $x\underset{*}{\odot}a$ eller den så kallade naturliga Tang. x med $x☿1$, och vi finna lätt des utvecklade värde vara =

$$= \left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \right) : \left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.4} - \text{etc.}\right),$$ äfvensom tvärtom $\mathit{л}x$ eller Arc. tang. x blir $= x\underset{*}{\odot}^{-}1$ eller den hithörande hyperlogarithmen.

Om man deremot uppletar ett exponentielt uttryck för $r☿x$, så finner man $\frac{\overline{1+ix}^r - \overline{1-ix}^r}{i(\overline{1+ix}^r + \overline{1-ix}^r)}$, men der är i imaginärt $(=\sqrt{-1}.)$

S. Jag tycker mig häri märka binomets udda och jemna delar.

J. Det kan så vara, men snarare erhålles de tvärtom uttryckta under en begripligare form just genom vår product; man får nemligen $\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)^r =$

$$= \frac{1-i.(r\underset{*}{\odot}x)}{1+i.(r\underset{*}{\odot}x)}.$$ Man kan ock komma till samma resultat genom betraktande af enhetens imaginära rötter $(\sqrt[n]{1} = I_n^{\frac{r}{}})$.

Flera. Allt detta fatta vi ännu icke nog tydligt.

J. Det kan väl vara. Saken tål att tänka på. Några utvecklingar har jag med flit öfverhoppat. Dessutom erfordras en hel synthesis, med hvars framställande jag nu ej torde få besvära Herrarne. Denna en annan gång.

Emedlertid får jag äran lemna en upplysning: den nemligen, att denna lära hänger noga tillsammans med den om *gentagna functioner*, ja, att den i sjelfva verket ej är annan än den förr utlofvade elementära delen deraf.

Flere. Mån-tro det! Vi voro ju nyss vid addition; — och gentagning är ju en del af differens-räkningen, eller lösning af differens-equation $\Delta y = f(y)$. — Hvilket salto-mortale!

J. Extrema se tangunt, mine herrar, och differens är ju blott en enkel motsättning af summa. Men jag är skyldig förklara mig litet närmare.

Om vi sätta $a|x = Fx$, så är tydligen $F^2x = F(Fx) = a|Fx = a|a|x =$ $= (2 \odot a)|x$, och $F^3x = F(F^2x) = a\, F^2x = a|a|a|x = (3 \odot a)|x$, o. s. v. ända till $F^rx = (r \odot a)|x$, hvarföre den gentagna functionen F^rx ej är stort annat än producten $r \odot a$, och tage vi härtill hyperlogarithmen $\wedge$, så få vi $\wedge(F^rx) =$ $= \wedge(r \odot a) + \wedge x = (r . \wedge a) + \wedge x$, samt $F^rx = \wedge(\overbrace{r . \wedge a} + \wedge x)$, hvarföre hvarje gentagen function kan derigenom och genom des omvända eller antilogarithmen $(\vee)$ alltid på et enkelt sätt uttryckas.

O. Från hvarje allmän summa $a|b$ få vi således en enkel function $Fx =$ $= a|x$, och des gentagna $F^rx = (r \odot a)|x$ genom des product. Men kan man icke tvärtom finna producten $r \odot x$ genom den gentagna?

J. Då $F^rx = (r \odot a)|x$, så behöfve vi blott härur genom lösning eller öfverflyttning söka $r \odot a$, då man får $r \odot a = (F^rx)\lceil x$.

O. Således lika många gentagna functioner eller lösta differens-equationer, som till producter utbildade summor, och tvärtom. Det var mycket! Men $r \odot x$ har ju ingen betydelse, så länge vi ej veta hvad det motsvarande $x|y$ är. Huru finna detta?

J. Först anmärke vi, att alltid det (såsom i inledn. t. gentagne f. p. 52 påstås) finnes en function λ sådan, att $\lambda(F^rx) = r + \lambda x$, nemligen $\lambda x = \dfrac{\wedge x}{\wedge a}$, eftersom redan $\dfrac{\wedge F^rx)}{\wedge a} = r + \dfrac{\wedge x}{\wedge a}$, och då vi redan vete att $\wedge x = x \odot \overline{c}$, så blir $\wedge$, om $a = c$ $\lambda x = \dfrac{x \odot \overline{c}}{a \odot \overline{c}} = x \odot \overline{a}$, efter $1 \odot a = a$, och således $a \odot \overline{a} = 1$. Men sätte vi $x = I =$ indifferenten, så blir den gentagna function $F^rx = F^rI = (r \odot a)|I = r \odot a$ eller helt enkelt producten. Vidare kan alltid af producten återfinnas högre summan $\alpha|\beta$, som

är $= (\alpha \odot \overline{a} + \beta \odot \overline{a}) \odot a$, det vill säga, om equation $F^r I = r \odot a = x$ löst ger $r = fx = x \odot \overline{a}$, så är $\alpha | \beta = (f\alpha + f\beta) \odot a = F^{(f\alpha + f\beta)} I$.

Så t. ex. emedan $b . \left(\frac{x}{b}\right)^{c^r}$ är en gentagen function, så kan den sättas $=$

$= F^r x = z$, hvilken equation löst ger först $c^r L \frac{x}{b} = L \frac{z}{b}$ så $r = \frac{L^2 \frac{z}{b} - L^2 \frac{x}{b}}{Lc}$, hvilket värde kan sättas $= fz$, om $x = I =$ const. Och då måste $F^{(f\alpha + f\beta} I =$

$= b \left(\frac{I}{b}\right)^{L\frac{\alpha}{b} \cdot L\frac{\beta}{b} : \left(L\frac{I}{b}\right)^2}$ vara $= \alpha | \beta$, och sättes $\beta = I$, så måste detta identiskt

blifva $= \alpha = b \left(\frac{I}{b}\right)^{L\frac{\alpha}{b} : L\frac{I}{b}} = b . \frac{\alpha}{b}$, hvilket det ock är, utan att I af denna equation närmare bestämmes, utan förblir indifferenten arbiträr.

Sätte vi nu $I = b . a$, så blir således $\alpha | \beta = b . a^{L\frac{\alpha}{b} \cdot L\frac{\beta}{a} : (La)^2}$ och $L\left(\frac{\alpha | \beta}{b}\right) = L\frac{\alpha}{b} \cdot L\frac{\beta}{b} : La$, eller $\underset{a}{L}\left(L\frac{\alpha|\beta}{b}\right) = \underset{a}{L}\left(\frac{\alpha}{b}\right) \cdot \underset{a}{L}\frac{\beta}{b}$, samt $\underset{a}{L}^2 \frac{(\alpha|\beta)}{b} =$

$= \underset{a}{L}^2\left(\frac{\alpha}{b}\right) + \underset{a}{L}^2\left(\frac{\beta}{b}\right)$, men nu skall alltid $\Lambda(\alpha|\beta) = \Lambda\alpha + \Lambda\beta$, följakteligen

är här hyperlogarithmen $\Lambda x = \underset{a}{L}^2\left(\frac{x}{b}\right)$. Tillika kunna vi häraf härleda den *vigtiga satsen,* att det för beräknande af en gentagen function $F^r x$ är nog, att ega en tabell öfver des värden för något visst argument $x = I$, så att denna function med tvenne argumenter r & x uträknas genom en med ett och des omvända. Detta är en omedelbar följd så väl af den motsvarande egenskapen af producten $r \odot x$, som af formlen $\lambda(F^r x) = r + \lambda x$ der λ är en *iterations-logarithm* och $= \Lambda x$, om Λa tages $= \underline{1}$, (såsom den arbiträra factorn vid Λ alltid medgifver). Då nemligen $\Lambda x = x \odot \overline{a}$ med a arbiträr eller en viss bestämd storhet och $r \odot a = F^r I = x$ ger $r = x \odot \overline{a} = \Lambda x = \lambda x$, så fås *iterations-logarithmen* λx genom $F^r I$ eller en viss gentagning, nemligen af den gentagna functionen med et visst ursprungligt argument I, t. ex. $I = 0{,}1$ eller $= 0{,}01$ o. s. v. Slutligen får jag äran meddela, at hvarje product också förer till en gentagen function eller rättare sjelf lätt gentages. Om vi nemligen sätta $c \odot x = Fx$, så blir

$F^2x=F(Fx)=c\odot Fx=c\odot(c\odot x)=(\dot{c}.c)\odot x=c^2\odot x$, och $F^3x=c\odot F^2x=$ $=c\odot(c^2\odot x)=(cc^2)\odot x=c^3\odot x$ o. s. v. ända till $F^rx=(c^r)\odot x$, eller $(c\odot)^rx=$ $=c^r\odot x$. Det är: des gentagne är sjelf en dylik product, men med visare $=c^r=r^{te}$ potensen af c. Och häraf kunna vi härleda ungefär lika beskaffade slutföljder som nyss.

Men mina Herrar! det är nu ej min mening, att närmare gå in på läran om gentagna functioner, hvilken i ock för sig sjelf utgör en dryg volum; jag har blott velat antyda des sammanhang med de mera elementära läror, hvaraf jag haft äran lemna prof, eller till hvilkas rätta behandling jag i utkast gifvit en och annan nyttig anvisning. För öfrigt får jag hänvisa til den nämde elementära formel-samling, innehållande bland annat de redan omnämda exemplen på de almänna satserne om almänna producten och deras omvända, — de almänna aliquoterne och rations-exponenterne, (se tabellerne N:o 1, 2, 3 och4, i Formulæ fundamentales). Härtil fogas derföre blott några exempel på enkla functioner och deras gentagna.

Antilogarithm, hyper-exponential	*enkel function*	*des gentagne*	*product*	*quot.*
$\bigvee x=\bigwedge^{-1}x=\vert^{,}x$	$c\vert x=fx$	$\overset{\frown}{c}\vert^r x=\overset{\frown}{r\odot c}\vert x=f^rx=\bigvee(r\bigwedge c+\bigwedge x)$	$r\odot x=\bigvee(r\bigwedge x)$ (NB. $r\odot I=I$)	$\overline{r}\odot x=\frac{1}{r}\odot x$
$\frac{x}{b}$	$c+x$	$\overset{\frown}{r.c}+x$	$r.x$	$\frac{1}{r}\cdot x$
$\frac{x}{b}-a$	$c+a+x$	$r.(c+a)+x$	$(r.x\circledast a-a)$	$\frac{1}{r}\cdot\overset{\frown}{x+a}-a$
$\bigvee(x-\bigwedge a)$	$(c\vert a)\vert x$	$(r\odot(c\vert a))\vert x$	$r\odot(x\vert a)\lceil a$	$\frac{1}{r}\odot(x\vert a)\lceil a$
$\urcorner x=\beta^x$	$c.x$	$c^r.x$	$x^r=x\urcorner r=r\dot{\times}x$	$x^{\frac{1}{r}}=\sqrt{x}$
$\urcorner(x-La)=\frac{\beta^x}{a}$	$c.a.x$	$(c.a)^r.x$	$(a.x)^r$	$\overset{\frown}{ax}^{\frac{1}{r}}$
$\urcorner x-\frac{1}{\gamma}$	$c+(1+\gamma c)x$	$(1+\gamma c)^rx+\frac{\overset{\frown}{1+\gamma c}^r-1}{\gamma}$	$\frac{1}{\gamma}\cdot(\overset{\frown}{1+\gamma x}^r-1)$	$\frac{1}{\gamma}\ \sqrt[r]{1+\gamma x}-1)$
$\frac{\urcorner x-\beta}{\gamma}$	$\alpha+\beta c+(\beta+\gamma c)x$	$1^rx=1^r_0+(1^r_1.x)$, om	$\frac{1}{\gamma}\cdot(\overset{\frown}{\beta+\gamma x}^r-\beta)$	$\frac{1}{\gamma}\cdot\sqrt[r]{\beta+\gamma x}-\beta)$
$\bigwedge x=\bigvee^{-1}x=\vert_{,}x$	$=1'x$	$1^r_1=(1_1)^r=(\beta+\gamma c)^r$ §		
		$1^r_0=\frac{1-1^r_1}{1-1_1}.(\alpha+\beta c)$		

Läran om Storhet

1) i allmänhet,

Allmän Storhetslära.

Cap. *A)* Storhet (des art).

Def. 1. Bestämdt är det som är så och icke annorlunda.

Def. 2. Grens är det som utmärker bestämningen, (eller som ger tilkänna, at det ena af de tvänne ting, mellan hvilka det är grens, upphörer och det andra tar vid) *).

Def. 3. Storhet (Quantum) är det som är likgiltigt för bestämning.

Anm. Den kan derföre bestämmas, betraktas ock i hvarje särskilt fall blott såsom bestämd eller åtminstone bestämbar. Men den kan ock bestämmas annorlunda än förut, d. ä. *ändras;* och det på hvad sätt som helst. *Föränderlighet* är derföre ock, jemte *bestämbarhet*, en hufvudegenskap af storhet.

Def. 4. En storhet, som är fullt bestämd, kallas en *särskilt* (individuel) *storhet* (t. ex Tre).

Anm. I des ställe säges ofta blott *storhet.* Dylika betecknas antingen med hvar sin bokstaf (a, b, c . . .) eller med hvart sit bestämda tekn (1, 2, 3 . . . β, π). — Hvarje särskilt storhet bör i samma sats beteknas med sin bokstaf; och tvärtom, hvarje bokstaf bör der betekna en och samma (individuella) storhet.

---

*) Grens härledes af gren, qvist, som fordom begagnades til des utmärkelse å fältet.

Def. 5. Storlek (quantitas) är den et tings egenskap, hvarigenom det är stort, eller eger storhet.

Def. 6. En storhet, som är aldeles bestämd, eller som tils vidare anses såsom sådan, kallas (så til vida) *constant* (oföränderlig); i sednare fallet (då den det oaktadt kan i andra afseenden bestämmas på flere sätt) kallas den *arbiträr constant.*

Ax. 1. Alla individuella storheter äro constanta, (ej tvärtom).

Ax. 2. För en arbiträr constant bör i allmänhet få tagas hvad särskilt storhet som helst, (dock af samma slag). Se Def. 8 & 12.

Def. 7. En storhet, som icke är eller anses vara individuelt bestämd, utan i stället kan få flera individuella bestämningar (eller som kan bestämmas så och annorlunda) kallas *föränderlig* (variabel).

Ax. 3. Den föreställer således en mängd (ja stundom en otalig mängd) särskilta storheter, — dock i hvarje fall blott någon viss af dessa.

Anm. 1. De föränderlige storheterna teknas ofta med x, y, $z \ldots$, under det de constanta teknas med a, b, c. ...

Anm. 2. En arbiträr constant kan, sedan den i et afseende varit som sådan ansed, åter i et annat göras til föränderlig.

Def. 8. De särskilta storheter, som en föränderlig storhet steg för steg föreställer, alteftersom den bestämmes så eller annorlunda (och således får alt andre och andre grenser), kallas des (särskilta) *värden (valores).* (De kunna teknas a^0, a', $a'' \ldots$ eller a_0, a_1, $a_2 \ldots$, särdeles om den föränderliga teknas med a, eller x^0, x', x'' etc. om den är x).

Anm. Dessa måste dock i almänhet vara underordnade något visst begrepp eller fullgöra något eller några vissa vilkor, för at i föreställningen kunna uppfattas under begrepp af *en* storhet. Och tvärtom föreställer denne en hvilken som helst af de förre, som äro så beskaffade, at om dem kan sägas det samma, dock i hvarje fall eller i samma sats blott en och den samma.

Def. 9. Om en föränderlig storhet (α) steg för steg antar värdena a, b, c, d, ... eller (i annan betekning) α_1, α_2, α_3, $\alpha_4 \ldots$ så kallas a eller α_1 des första, b eller α_2 des *andra,* c eller α_3, des *tredje* eller d eller α_4 des *fjerde* etc.

värde; och under det man föreställer sig denna förändring, får man ock begrepp om *tid,* såsom en storhet den der förflutit under det förändringen försiggått, hvars grenser äro hvart och et af de ögonblick (de nu), då man tänkte sig α hafva antagit värdena α_1, α_2, α_3 etc. Teknen 1, 2, 3, etc. som läsas *en, två, tre* etc. eller rättare det första, andra etc. tjena här blott för at åtskilja de särskilta antagna värdena. (Det är först längre fram, som vi komma att ge dem en bestämd betydelse af storhet. Här äro de ännu blott artiklar, liksom *en* ofta i språket, eller grensmärken för särskilta storheter, som tjena at skilja dem ifrån hvarandra och visa i hvad ordning de upkommit, eller man föreställer sig dem, — *Ordinalia*).

Def. 10. En blott såsom aldeles bestämd ansed storhet och som blott bibehåller et och samma värde, under det en annan antager flere särskilta, är blott at anse såsom *constant* i anseende til denna föränderliga, eller är en *af denna oberoende* storhet. Så om y förblir $= b$ (t. ex. $= 2$) under det x antar alla sina möjliga värden a_0, a_1, a_2, etc., så är y constant til x, eller oberoende af x. Detta hindrar dock icke, at ju i en ny betraktelse y kan få andre värden b_0, b_1, b_2, etc. och i detta fall är det som b kallas en *arbiträr constant.*

Def. 11. Men erhåller y dessa värdena först under det en annan föränderlig storhet z antar värdena c_0, c_1, c_2 etc., så säges y vara föränderlig tillika med z, samt deraf *beroende,* om värdena b äro på något sätt bestämda genom hvart sit af värdena c, så at t. ex. y måste $= b_2$, när $z = c_2$, o. s. v. Men då kan y ock anses för en af z *beroende föränderlig storhet,* eller som en *function* af z. Så om t. ex. en far vid trettio års ålder får en son, så blir fadren 31 år när sonen är ett år, och i almänhet fadrens ålder beroende af sonens, eller tvärtom.

Def. 11. Storheter, hvilka kunna tänkas blifva en och samma föränderlig storhets särskilta värden, sägas vara *likartade,* eller *af samma slag (homogena).*

Ax. 4. Likartade storheter skiljas genom likartade *grenser,* hvilka bestämma deras storlek. (Andre slags grenser kunna ock anses bestämma deras art. Så t. ex. är en yta til sin art genom de å ömse sidor varande rymderna bestämd,

men til sin storlek af sina kanter (yttersta linier). Ty lika väl som ytan begrensar rymderne, kunna dessa anses begrensa ytan, — fast ej til storleken, Således *art-grenser* och *storleks-grenser.* Det är klart, at en storhet är *föränderlig,* blott så vida som den får andre storleksgrenser).

Post. Storheter finnas, och det flere af samma slag.

Ax. 5. Grens är i almänhet olikartad med det begrensade, (ty annars vore icke någon skiljaktighet mellan de begrensade angiflig, utan allestädes vore et idel enahanda, så at ingen begrensning kunde urskiljas eller på något sätt förmärkas).

Anm. Origtigt, eller åtminstone oegentligt säges derföre en punct vara sin egen grens: den är icke någon storhet och behöfver således ingen grens. Snarare kan den anses begrensad af hela den omgifvande rymden. Det som begrensar en bestämd rymd eller kropp kallas *yta,* hvilken skiljer denna från den oändliga rymden. Tvärtom kan denna och kroppen anses för ytans grens, men den blir af dem dock icke helt och hållet bestämd, utan dertil behöfves en ny grens = *lineen.* Se *Geom.*

Ax. 6. En storhets grens är derföre antingen icke storhet, eller ock åtminstone en storhet af annat slag än det den begrensar (t. ex. en punct, en kropps yta).

Def. 12 & Post. Derföre kunna ock möjligtvis *olikartade* (heterogena) storheter finnas, d. ä. sådane som en och samma föränderliga storhet icke als kan föreställa, huru des grens än bestämmes.

Ax. 7. Det som, huru det än bestämmes (genom förflyttade grenser), förblir med sig likartadt, är så tilvida en storhet. (T. ex. När emellan et par åkertegar, din och min, grensen borttages, att de förenas til en enda teg, så är denne dock en åker, fast af annan vidd, och således likartad med de förra, så at alle tre äro storheter af samma slag.)

Ax. 8. Det, som, när det på något sätt bestämmes annorlunda, blir olikartadt, är såtilvida icke storhet. (T. ex. När en åker göres til äng, eller när mjölksaften öfvergår först i blod, så i kött och ben, o. s. v. Detta är ej en quantitativ förändring, utan en qualitativ, eller en *förvandling*).